# Динамика системы материальных точек (СМТ)

## Законы сохранения для системы материальных точек

### Теорема о изменении импульса СМТ

По определению,

Введем:

$$\vec{p}\_c=\sum\_{i=1}^N \vec{p}\_i\\$$

Можем расписать как

$$\label{dp\_i:dt}
\frac{d{\vec{p}\_i}}{dt}=\vec{F}\_i=\vec{F}\_i^\text{внутр}+\vec{F}\_i^\text{внеш}\\$$

Где

$$\vec{F}\_i^\text{внутр}=\vec{F}\_{1,i}+\vec{F}\_{2,i}+\ldots+\vec{F}\_{i-1,i}+\vec{F}\_{i+1,i}+\ldots+\vec{F}\_{N,i}\\$$

Будем рассматривать для :

По третьему закону Ньютона:

Тогда

Подействуем оператором суммы на левую и правую части уравнения ([dp\_i:dt]):

$$\sum\_{i=1}^N \frac{d{\vec{p}\_i}}{dt}= \underbrace{\sum\_{i=1}^N \vec{F}\_i^\text{внутр}}\_{\equiv 0}+ \underbrace{\sum\_{i=1}^N \vec{F}\_i^\text{внеш}}\_{\equiv \vec{F}\_c^\text{внеш}}\\$$

Перепишем левую часть, вытащив дифференцирование из-под суммы:

И правую:

Тогда получаем **теорему о изменении импульса СМТ в дифференциальной форме**:

Интегрируя, получим **теорему о изменении импульса СМТ в интегральной форме**:

Рассматриваются следующие важные случаи.

**Случай первый.** Внешняя сила равна нулю при любых . Тогда система называется *изолированной*. Такое состояние достигнуть очень сложно: оно, скорее, является гипотетическим.

Тогда

$$\vec{F}^\text{внеш}\_c=0 \Rightarrow \vec{p}\_c=const\\$$

**Случай второй.** Произвольно выбранная внешняя сила может быть не равна нулю, но сумма внешних сил равна нулю. Это уже более реальный случай, чем предыдущий.

$$\vec{F}^\text{внеш}\_c=0 \Rightarrow \vec{p}\_c=const\\$$

**Случай третий.** Сумма внешних сил не равна нулю, но сохраняется её направление.

(0,0) – (3,-1) node[right] ; (1.5,-0.5) – ++ (70:1); (1.5,-0.5) – ++ (250:2) node[below] ;

Тогда можно выбрать такую ось , что в проекции на неё

$$F^\text{внеш}\_{cx}=0 \Rightarrow p\_{cx}=const\\$$

**Случай четвертый.** Сумма внешних сил не равна нулю, но если выполняется система условий:

Тогда

$$\vec{p}\_{c}=const\\$$

### Теорема о движении центра масс системы материальных точек

Разберемся с геометрическим местом центром масс СМТ.

Пусть мы имеем систему двух МТ , тогда интуитивно :

(-2,0) – (0,0) circle (2pt) node [above] – (2,0) node node[above, yshift=0.5em] C node[below, yshift=-0.5em] – (4,0) circle (2pt) node [above] – (6,0);

Теперь пусть , тогда интуитивно :

(-2,0) – (0,0) circle (2pt) node [above] – (8/3,0) node node[above, yshift=0.5em] C node[below, yshift=-0.5em] – (4,0) circle (4pt) node [above] – (6,0);

Теперь обобщаем на систему из материальных точек с произвольными массами:

**Определение.** Центр масс - это такая точка, которая задается радиус-вектором

Нужно задастся вопросом: *сменится ли положение центра масс от смены точки отсчета (полюса) O?*

(4,0) node [right] ; (0,0) – node [above] (4,0); (0.5,-2) – node [above] (4,0); (0.5,-2) – node [left] (0,0);

Геометрически очевидно, что

Тогда

И получаем что и требовалось найти:

Положение центра масс *не зависит* от положения полюса.

**Определение.** Скорость центра масс задается как:

*Оговорка:* . Тогда

По сути, весь <<размазанный>> по пространству импульс системы мы можем причислить к одной точке – *центру масс* системы.

Это и есть теорема о движении центра масс системы материальных точек.

Мы получили важный результат: внутренние силы *не могут* создать ускорения СМТ!

### Динамика тел переменной массы. Уравнение Мещерского

(0,0) circle (1.999cm); (0,0) ++ (-135:2) circle (1cm);

(C) at (1,1);

(C) ++ (45:2) circle (1cm);

(C) circle (2cm); (C) ++ (45:2) circle (1.1cm);

([shift=(16:2cm)]C) arc (16:74:2cm);

;

at () ;

at () ;

at () ;

(0,0) circle (2cm);

([shift=(45:2cm)]C) – node[below, yshift=-0.5em] ++(-135:1);

([shift=(-45:2cm)]0,0) – node[above, pos=0.7] ++(-45:1);

(-3.7,-3.7) rectangle (3.5,3.5);

(0,0) circle (2cm); (C1) at (-0.02,-0.02);

(C1) circle (1.999cm); (C1) ++ (-135:2) circle (1cm);

(C1) at (-1,-1);

(C1) circle (1.999cm); (C1) ++ (-135:2) circle (1cm);

([shift=(16+180:2cm)]C1) arc (16+180:74+180:2cm);

(C) at (0,0);

(C) ++ (45:2) circle (1cm);

(C) circle (2cm); (C) ++ (45:2) circle (1.1cm);

;

at () ;

at () ;

at () ;

([shift=(-135:2cm)]C1) – ++(-135:1) node[below] ;

([shift=(-30:2cm)]0,0) – node[below, pos=1, yshift=0em] ++(-30:1); (-3.7,-3.7) rectangle (3.5,3.5);

Пусть – масса <<основного>> тела, – то, что <<отвалится>> (), – то, что присоединится.

Запишем импульс системы до и после изменения конфигурации:

Тогда изменение импульса будет

Теперь нужно аккуратно раскрыть скобки:

$$\begin{gathered}
\begin{aligned}
\Delta\vec{p}=
\vec{p}(t)-\vec{p}\_0=
M\vec{v}-\Delta m\_1\vec{v} +\Delta m\_2\vec{v}+\\+
M\Delta\vec{v}-{
\textcolor{red}{\tikz[baseline={([yshift=-1ex]current bounding box.center)}]
\node [rectangle, minimum width=1ex,rounded corners,draw]
{\normalcolor\m@th$\displaystyle\Delta m\_1\Delta\vec{v}$};}
} +{
\textcolor{red}{\tikz[baseline={([yshift=-1ex]current bounding box.center)}]
\node [rectangle, minimum width=1ex,rounded corners,draw]
{\normalcolor\m@th$\displaystyle\Delta m\_2\Delta\vec{v}$};}
}+\\+
\Delta m\_1 \vec{v}+{
\textcolor{red}{\tikz[baseline={([yshift=-1ex]current bounding box.center)}]
\node [rectangle, minimum width=1ex,rounded corners,draw]
{\normalcolor\m@th$\displaystyle\Delta m\_1\Delta\vec{v}$};}
}+\Delta m\_1\vec{u}\_1-\\-
M\vec{v}-
\Delta m\_2\vec{v}-\Delta m\_2\vec{u}\_2
\end{aligned}\end{gathered}$$

Величинами вида ${
\textcolor{red}{\tikz[baseline={([yshift=-1ex]current bounding box.center)}]
\node [rectangle, minimum width=1ex,rounded corners,draw]
{\normalcolor\m@th$\displaystyle\Delta \cdot\Delta$};}
}$ пренебрежем, как величинами более высокого порядка малости, чем . Приведем подобные:

$$\begin{gathered}
\Delta\vec{p}=
\vec{p}(t)-\vec{p}\_0=
{\tikz[baseline] \node [strike out,draw,anchor=text,inner sep=0pt,text=black,thick,draw=green]{$M\vec{v}$};}-{\tikz[baseline] \node [strike out,draw,anchor=text,inner sep=0pt,text=black,thick,draw=red]{$\Delta m\_1\vec{v}$};} +{\tikz[baseline] \node [strike out,draw,anchor=text,inner sep=0pt,text=black,thick,draw=blue]{$\Delta m\_2\vec{v}$};}+\\+
M\Delta\vec{v}+
{\tikz[baseline] \node [strike out,draw,anchor=text,inner sep=0pt,text=black,thick,draw=red]{$\Delta m\_1\vec{v}$};}+\Delta m\_1\vec{u}\_1-\\-
{\tikz[baseline] \node [strike out,draw,anchor=text,inner sep=0pt,text=black,thick,draw=green]{$M\vec{v}$};}-
{\tikz[baseline] \node [strike out,draw,anchor=text,inner sep=0pt,text=black,thick,draw=blue]{$\Delta m\_2\vec{v}$};}-\Delta m\_2\vec{u}\_2
$$

Тогда можем, наконец, окончательно записать изменение импульса:

Физика оперирует не бесконечно малыми величинами, а дискретными. Отсюда следует

Переходя к дифференциалам, равенство запишем строгим:

Под импульсом мы понимали импульс системы, поэтому его производная - равнодействующая внешних сил. Перепишем формулу:

Это то, к чему мы стремились - уравнение Мещерского.

### Теорема о изменении момента импульса СМТ

**Определение.** Момент импульса -й материальной точки СМТ

**Определение.** Момент импульса СМТ

Ранее мы доказали, что . Зададимся вопросом, так ли это для СМТ?

Для -й материальной точки СМТ

Тогда

Распишем:

Для взаимодействия -й и -й точек:

Это значит, что все .

Получили **теорему**: *Момент импульса СМТ меняется за счет* ***только*** *момента внешних сил.*

### Закон сохранения момента импульса

**Случай первый.** Внешняя сила равна нулю при любых .

Тогда

$$\vec{N}\_c=const\\$$

**Случай второй.** Произвольно выбранная внешняя сила может быть не равна нулю, но момент внешних сил равен нулю.

$$\vec{M}^\text{внеш}\_c=0 \Rightarrow \vec{N}\_c=const\\$$

**Случай третий.** Произвольно выбранный момент внешней силы может быть не равна нулю, но момент внешних сил равен нулю.

$$\vec{M}^\text{внеш}\_c=0 \Rightarrow \vec{N}\_c=const\\$$

**Случай четвертый.** Момент внешних сил не равен нулю, но сохраняет направление.

(0,0) – (3,-1) node[right] ; (1.5,-0.5) – ++ (70:1); (1.5,-0.5) – ++ (250:2) node[below] ;

Тогда можно выбрать такую ось , что в проекции на неё

$$M^\text{внеш}\_{cx}=0 \Rightarrow N\_{cx}=const\\$$

**Случай пятый.** Запишем теорему о изменении момента импульса в интегральной форме.

Тогда если выполняется система условий:

То

$$\vec{N}\_{c}=const\\$$

Нужно задастся вопросом: *что зависит от смены точки отсчета (полюса) O?*

(4,0) node [right] ; (0,0) circle (1pt) node[left] – node [above] (4,0); (0.5,-2) circle (1pt) node[left] – node [above] (4,0); (0.5,-2) – node [left] (0,0);

Если мы найдем такую СО, где импульс системы равен нулю, то в ней момент импульса не зависит от выбора точки отсчета.

Такая СО - **центромассовая**, и если мы в ней – сопровождающая. Будем обозначать величины в ЦМСО звездочкой:

### Связь моментов импульса в лабораторной и центромассовой системах отсчета

– начало отсчета в ЛСО (лабораторной системе отсчета), – в ЦМСО (центромассовой системе отсчета).

(A) at (0,0); (B) at (0.5,-2); (C) at (4,0); (C) circle (1pt) node [right] ; (0,0) circle (1pt) node[left] ; (0.5,-2) circle (1pt) node[left] ;

(A) – node [above] (C); (B) – node [above] (C); (B) – node [left] (A);

Причем здесь первое слагаемое отвечает за вращение СМТ относительно центра масс, а второе - за вращение центра масс относительно ЛСО.

### Уравнение моментов относительно оси

Введем сферическую систему координат с центром , ортонормированным базисом

(0,0) circle (2cm); (0,0) circle (1pt);

(0,0) (180:2.5) – (0:2.5); (0,0) (90:2.5) – (-90:2.5); (0,0) (90:2.5) – node[left] (90:3); ; (-90:1) node[rotate=90] ; (0,0) – node[midway,fill=white!20, opacity=0.9] (45:2) coordinate (A); (0,1.414) – node[midway,fill=white!20, opacity=0.9] (A); (0,0) – node[midway,fill=white!20, opacity=0.9] (0,1.414);

(A) – ++(45:0.7) node[right, above] ; (A) – ++(135:0.7) node[right, above] ;

(0,0) circle (2cm); (0,0) circle (1pt);

(0,0) (180:2.5) – (0:2.5); (0,0) (90:2.5) – (-90:2.5); (0,0) (90:2.5) – node[left] (90:3);

(110:1.2) node[left] ;

(0,0) – (0:2) coordinate (A);

(A) – ++(0:0.7) node[right, above] ; (A) – ++(90:0.7) node[right, above] ;

Можем записать

Запишем момент импульса по определению:

Формально запишем его проекцию на :

Откуда по бессмертному <<бац минус цаб>>

Все вышеизложенные выкладки были для *одной* материальной точки. Для СМТ:

В частном случае, когда все точки тела вращаются с одной угловой скоростью (твердое тело),

**Определение.** Момент инерции - это мера инертности вращательного движения, выражающаяся как

Можем записать закон сохранения момента импульса в таком виде:

## Энергетические соотношения для СМТ

Для точки нам известно:

Поставим себе задачу: *попробовать избавиться (по аналогии с импульсом и моментом импульса) от внутренних сил в <<>>*

(A) at (0,0) ; (B) at (3,-3) ; (A) node [above] – (B) node [below] ; (A) circle (2pt) (B) circle (2pt);

(A) – node[midway,fill=white!20, opacity=0.9] ++(-45:1.5); (B) – node[midway,fill=white!20, opacity=0.9] ++(135:1.5);

Печально, но это – **не ноль в общем случае**. Избавиться от внутренних сил в <<>> не удалось.

### Связь между в различных системах отсчета. Теорема Кёнига

Как всегда, нас будет интересовать выделенная система отсчета. Обозначим – лабораторную систему отсчета, – движущуюся относительно ЛСО со скоростью .

(-1,0) – (3,0) node[right, black] ;

(0,1) – ++(0,1) node[right, black] ;С (-1,0) – ++(0,3) node[right, black] ;

(0,1.3) – node[above, black] ++(1,0); (0,1) – ++(2,0);

Для системы материальных точек

**Если** движущаяся система – ЦМСО, тогда , и выполняется **теорема Кёнига:**

### Потенциальная энергия СМТ. Закон сохранения механической энергии для СМТ

Для материальной точки нам известно:

По нашему определению,

**Пусть** все силы будут консервативными. **Тогда**

Иначе говоря,

Получили **закон сохранения механической энергии для СМТ**: